

MATHEMATICS

(2023)

Time : 3 Hours 15 Minutes]

[Full Marks : 80

পরীক্ষার্থীদের জন্য নির্দেশ :	Instructions to the Candidates :
1. উপাত্তে প্রশ্নের পূর্ণমান সূচিত আছে।	1. Figures in the margin indicate full marks for the questions.

এই প্রশ্নপত্রিকাটি দ্বিভাষিক — বাংলা এবং ইংরাজী । যদি কোনো ক্ষেত্রে সন্দেহ বা বিভ্রান্তির সৃষ্টি হয়, সেক্ষেত্রে ইংরাজী ভাষাই চূড়ান্ত বলে বিবেচিত হবে ।

This Question Booklet is in two versions — Bengali and English. In case of any doubt or confusion, English version will prevail.

sciencemaster.in

(বহুবিকল্পভিত্তিক প্রশ্নাবলী)

GROUP - A

1. সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো : 1 × 10 = 10
- i) যদি $n(A) = 115$, $n(B) = 326$ এবং $n(A - B) = 47$ হয়, তবে $n(A \cup B)$ এর মান হবে
- a) 273 b) 373
c) 173 d) এদের কোনোটিই নয়।
- ii) $Z = -2$ জটিল রাশির বিস্তার (amplitude) হল
- a) π b) $\frac{\pi}{2}$
c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{6}$
- iii) $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos \theta$ হলে, $\cos \theta - \sin \theta$ এর মান হবে
- a) $\sin \theta$ b) $\sqrt{2} \sin \theta$
c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$ d) এদের কোনোটিই নয়।

(দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্নাবলী)

GROUP - B

2. a) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও : 2 × 2 = 4
- i) সেটের নিয়মাবলি প্রয়োগ করে 12, 15 এবং 18 এর গু.সা.গু নির্ণয় করো ।
 - ii) যদি $4f(x) + 3f(-x) = 7 - 3x$ হয়, তবে $f(x)$ নির্ণয় করো ।
 - iii) প্রমাণ করো $\frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ = 1$.
 - iv) যদি $A + B + C = \pi$ এবং $\cos A = \cos B \cos C$ হয়, তবে দেখাও $\tan A = \tan B + \tan C$.
- b) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও : 2 × 2 = 4
- i) দেখাও $(\sqrt{i} + \sqrt{-i})$ এর একটি মান $\sqrt{2}$.
 - ii) একটি দাবার বোর্ডে বর্গক্ষেত্র সংখ্যা নির্ণয় করো ।
 - iii) যদি a, b, c গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত, x ও y যথাক্রমে a, b ও b, c এর সমান্তরীয় মধ্যক হয় তবে প্রমাণ করো $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{b}$.
 - iv) প্রমাণ করো $2^{2n} - 3n - 1, 9$ দ্বারা বিভাজ্য যেখানে $n \in Z, n > 1$.
- c) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও : 2 × 1 = 2
- i) কেন্দ্র $(2, 0)$ এবং y -অক্ষকে স্পর্শ করে যে বৃত্ত তার সমীকরণ নির্ণয় করো ।
 - ii) k -এর কোন্ মানের জন্য $(2\sqrt{3}, 1)$ বিন্দুটি $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্তের বাইরে অবস্থান করে ?
- d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও : 2 × 1 = 2
- i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ হলে, সর্বদাই কি $f(x) = g(x)$ হবে ? যুক্তিসহ উত্তর দাও ।
 - ii) মান নির্ণয় করো : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos^2 x)}{x^2}$.
- e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও : 2 × 1 = 2
- i) দুটি ছক্কা একত্রে ছোড়া হলে, প্রাপ্ত সংখ্যা দুটির বিয়োগফল 1 হবার সম্ভাবনা নির্ণয় করো ।
 - ii) 2, 4, 6, 8, 10-এর ভেদমান (variance) নির্ণয় করো ।

GROUP - C

3. a) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও : 4 × 2 = 8

i) দুটি সসীমসেট A ও B তে যথাক্রমে p ও q সংখ্যক উপাদান আছে। যদি A সেটের উপসেট সংখ্যা B সেটের উপসেট সংখ্যা অপেক্ষা 56 বেশী হয় তবে p ও q এর মান নির্ণয় করো।

ii) ΔABC তে যদি $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ হয় তবে দেখাও

$$\angle C = 60^\circ.$$

sciencemaster.in

iii) $a \cos \theta + b \sin (\theta + \alpha)$ -এর চরম মান নির্ণয় করো (যেখানে a, b, α ধ্রুবক)।

b) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও : 4 × 2 = 8

i) গাণিতিক আরোহণ তত্ত্বের সাহায্যে প্রমাণ করো পরপর তিনটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 9 দ্বারা বিভাজ্য।

ii) যদি $Z_1 = (\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$ এবং $Z_2 = -\sqrt{3}+i$ হয় তবে $\arg Z_1$ এবং $\arg Z_2$ নির্ণয় করো এবং এর সাহায্যে $\arg (Z_1 Z_2)$ নির্ণয় করো।

iii) 14 এবং 38-এর মধ্যে n সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক আছে। দ্বিতীয় ও শেষ মধ্যকের অনুপাত 4 : 7 হলে n-এর মান নির্ণয় করো।

iv) $(1+x)^n$ বিস্তৃতির পরপর 4টি পদের সহগ a_1, a_2, a_3 ও a_4 হলে প্রমাণ করো $\frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_3}{a_3+a_4} = 2 \frac{a_2}{a_2+a_3}$.

c) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও : 4 × 2 = 8

i) কোনো সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহু $x+y-2=0$ এবং ভরকেন্দ্র (0, 0) তার একটি শীর্ষ বিন্দু নির্ণয় করো।

ii) $x^2 + y^2 + 2ax + c^2 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 2by + c^2 = 0$ বৃত্ত দুটি পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে দেখাও $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$.

iii) (3, 5) বিন্দু থেকে $x-2y=1$ সরলরেখার সমান্তরাল দিকে পরিমিত $2x+3y=14$ সরলরেখার দূরত্ব নির্ণয় করো।

d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও : 4 × 1 = 4

i) যদি $f(x) = \begin{cases} a + bx & , x < 1 \\ 4 & , x = 1 \\ b - ax & , x > 1 \end{cases}$ এবং $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ হয়

তবে a ও b -এর মান নির্ণয় করো ।

ii) অন্তরকলনের প্রাথমিক তত্ত্ব প্রয়োগে $\sin 2x$ এর $x = \frac{\pi}{8}$ বিন্দুতে অন্তরকলন নির্ণয় করো ।

e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও : 4 × 1 = 4

i) বিরুদ্ধ ধনাত্মক পদ্ধতির (Contrapositive method) সাহায্যে নিম্নলিখিত যৌগিক বিবৃতির সত্যতা বিচার কর :

" যদি x একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় যেখানে x^2 যুগ্ম, তা হলে x সংখ্যাটিও যুগ্ম "

ii) p ও q যেকোনো দুটি বিবৃতির ক্ষেত্রে প্রমাণ করো
($\sim q \wedge p$) \vee ($p \vee \sim p$) একটি টটোলজি (tautology).

f) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও : 4 × 1 = 4

i) যেকোনো দুটি ঘটনা A ও B -এর ক্ষেত্রে প্রমাণ করো

$$P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B).$$

ii) পাঁচটি সংখ্যার গড় মান 4.4 এবং ভেদমান 8.24 । যদি পাঁচটির মধ্যে তিনটি সংখ্যা 1, 2 এবং 6 হয় তা হলে অপর সংখ্যা দুটি নির্ণয় করো ।

GROUP - D

4. a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও : 5 × 1 = 5

i) যদি $15\theta = \pi$ হয় তবে দেখাও

$$\cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 3\theta \cdot \cos 4\theta \cdot \cos 5\theta \cdot \cos 6\theta \cdot \cos 7\theta = \frac{1}{2^7}.$$

ii) যদি $\cot \frac{\theta}{2} = \cot^3 \frac{\phi}{2}$ এবং $2\cot \phi = \cot \alpha$ হয় তবে দেখাও

$$\theta + \phi = 2\alpha.$$

iii) সমাধান করো : $16^{\sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} = 10$ ($0 \leq x \leq \pi$).

b) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও : 5 × 2 = 10

i) $(2 + 3i)x^2 - bx + (3 - i) = 0$ সমীকরণের একটি বীজ $2 - i$, অন্য বীজটি এবং b -এর মান নির্ণয় করো।

ii) সমাধান করো : $\frac{|x|-2}{|x|-3} > 0$, যেখানে $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm 3$.

iii) নিম্নলিখিত শ্রেণিটির n সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় করো :

$$2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \dots$$

iv) কোনো শ্রেণিতে 6টি নির্দিষ্ট সময়কালে (period) 5টি বিষয়কে কত বিভিন্ন প্রকারে বিন্যস্ত করা যায় ?

c) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও : 5 × 1 = 5

i) যেকোনো পরাবৃত্ত ও তার অনুবন্ধী পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা যথাক্রমে e_1 ও e_2 হলে দেখাও যে, $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1$.

sciencemaster.in

ii) $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ উপবৃত্তের নাভিদ্বয় s ও s' এবং উপবৃত্তের উপরিস্থিত

কোনো বিন্দু p হলে প্রমাণ করো $sp + s'p = 20$ ।

iii) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের মধ্যে একটি সমবাহু ত্রিভুজ অন্তর্ভুক্ত করা হল যার একটি শীর্ষ $(0, 0)$ হলে ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।