

MATHEMATICS
(New Syllabus)

2022

PART-A

Total Time : 3 Hours 15 minutes]

[Total Marks : 80

পরীক্ষার্থীদের জন্য নির্দেশ :	Instructions to the Candidates :
1. পরিমিত এবং যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে।	1. <i>Special credit will be given for answers which are brief and to the point.</i>
2. উপাত্তে প্রশ্নের পূর্ণমান সূচিত আছে।	2. <i>Figures in the margin indicate full marks for the questions.</i>

PART-A

(Marks : 70)

1. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2 × 1 = 2

(ii) $f(x) = \frac{3x+4}{5x-7}$ ($x \neq \frac{7}{5}$) এবং $g(x) = \frac{7x+4}{5x-3}$ ($x \neq \frac{3}{5}$) হলে দেখাও যে

$$f(g(x)) = g(f(x)).$$

(iii) মনে করো, $A = \{ 1, 2 \}$, $B = \{ 1, 8 \}$ এবং $f: A \rightarrow B$, চিত্রণ, যেখানে $f(x) = x^3$

এবং $g: A \rightarrow B$ চিত্রণ, যেখানে $g(x) = 6x^2 - 11x + 6$ দ্বারা সংজ্ঞাত। প্রমাণ করো,

$$f = g.$$

(iii) $\sec^2\left(\cot^{-1}\frac{1}{3}\right) + \operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$ -এর মান নির্ণয় করো।

(b) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2 × 1 = 2

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ হলে দেখাও যে $A - A^T$ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

(ii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ হলে x ও y -এর মান নির্ণয় করো।

(iii) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 7 \\ x & 3 \end{vmatrix}$ হলে x -এর মান নির্ণয় করো।

(c) যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2 × 3 = 6

(i) $f(x) = x$ যখন $x \geq 0$

$= 2$ যখন $x < 0$

দেখাও যে $x = 0$ -তে $f(x)$ অসম্পন্ন।

(ii) $ye^y = x$ হলে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(1+y)}$ ।

(iii) $\int_{-1}^1 x|x| dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

(iv) সমাধান করো : $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$ ।

(v) $x > 0$, $y > 0$ এবং $xy = 1$ হলে $x + y$ -এর লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় করো।

(vi) $(4, 4)$ বিন্দুতে $x^2 + y^2 = 32$ -এর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করো।

sciemaster.in

(d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2 × 1 = 2

(i) দেখাও যে (1, -1, 2), (3, 4, -2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখা (0, 3, 2) এবং (3, 5, 6) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখা পরস্পর লম্ব।

(ii) (1, 0, 0), (0, 2, 0) এবং (0, 0, 4) বিন্দুগামী সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(iii) $\vec{a} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ হলে দেখাও যে $\vec{a} + \vec{b}$ এবং $\vec{a} - \vec{b}$ পরস্পর লম্ব।

(e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

2 × 1 = 2

(i) $P(A) = \frac{6}{13}$, $P(B) = \frac{5}{13}$ এবং $P(A \cup B) = \frac{7}{13}$ হলে $P(A/B)$ নির্ণয় করো।

(ii) একটি ছকাকে ছোঁড়া হলো। ছোঁড়ার পর যে সংখ্যাগুলি আসতে পারে তারা 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে তাকে E দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সংখ্যাটি জোড় সংখ্যা দেখা গেলে তাদেরকে F দ্বারা প্রকাশ করা হয়। দেখাও যে E এবং F পরস্পর স্বাধীন।

2. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4 × 1 = 4

(i) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ যেখানে x বাস্তব এবং $x \neq \pm 1$ -এর বিস্তার নির্ণয় করো।

(ii) $f: R \rightarrow R$ একটি চিত্রণ যেখানে $f(x) = x^3 - 6$, সব $x \in R$, $R =$ বাস্তব সংখ্যা সমূহের সেট। প্রমাণ করো যে, f চিত্রণটি বাইজেক্টিভ।

(b) নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলি থেকে যে কোনো দুটির উত্তর দাও :

4 × 2 = 8

(i) $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ y & 2 \end{pmatrix}$ এবং $A + B = BC$ হলে

x ও y -এর মান নির্ণয় করো।

অথবা

$$A + 2B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ এবং } 2A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ হলে } A \text{ ও } B \text{ ম্যাট্রিক্স}$$

নির্ণয় করো।

(ii) দেখাও যে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স $A^2 - 4A - 5I_3 = 0$ সমীকরণটি সিদ্ধ করে।

অতঃপর A^{-1} নির্ণয় করো। $\left[I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$

অথবা

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ এবং } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ হলে, দেখাও যে } B^T A B \text{ একটি কর্ণ}$$

ম্যাট্রিক্স।

(iii) প্রমাণ করো $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

অথবা

প্রমাণ করো যে $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1 - x^3)^2$.

(c) নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

4 × 3 = 12

(i) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ যখন $x \neq 0$

= 0 যখন $x = 0$

অনেককটি যে বিন্দুতে সত্ত্বত নয় তা নির্ণয় করো।

অথবা

$y = \sin(2\sin^{-1} x)$ হলে দেখাও যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{dy}{dx} - 4y$.

(ii) মান নির্ণয় করো $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

অথবা

মান নির্ণয় করো $\int \frac{dx}{1+\tan x}$.

(iii) সমাধান করো $x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$.

অথবা

$(-2, 3)$ বিন্দুদ্বারা একটি বক্রের (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা $\frac{2x}{y^2}$ হলে বক্রের

সমীকরণ নির্ণয় করো।

(d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4 × 1 = 4

- (i) মূলবিন্দু এবং (5, 2, 4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।
- (ii) একটি সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করো যা $x + y + z = 1$ এবং $2x + 3y + 4z = 5$ -এর ছেদ সরলরেখাগামী এবং $x - y + z = 0$ -এর উপর লম্ব।
- (iii) দুটি একক ভেক্টরের সমষ্টি একটি একক ভেক্টর হলে দেখাও যে, ভেক্টর দুটির অন্তরের মান $\sqrt{3}$

(e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4 × 1 = 4

- (i) Integral Calculus ব্যবহার করে $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
- (ii) নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞানুসারে $\int_0^1 (2x + 1) dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

(f) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

4 × 1 = 4

- (i) 10 টি কার্ড 1 থেকে 10 পর্যন্ত নামাঙ্কিত করে একটি বাসে রাখা হলো। সেখান থেকে একটি কার্ড সমসম্ভবভাবে টানা হলো। যে কার্ডটি টানা হল তার নামাঙ্কিত সংখ্যাটি 3-এর থেকে বড়ো। ঐ সংখ্যাটি একটি জোড় সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।
- (ii) একটি ছলা দু'বার চুঁড়ে ফেলা হলো এবং দু'বারে যে সংখ্যাগুলি এলা তাদের যোগফল 6. যে সংখ্যাগুলি দেখা গেল তার মধ্যে একটি অবশ্যই 4 থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

3. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

5 × 1 = 5

(i) একজন স্বাস্থ্যবিধিসম্মত খাদ্য নির্বাচনকারী দুই প্রকার খাদ্য একত্রে মিশ্রিত করতে চান যাতে ঐ মিশ্রণে কমপক্ষে 8 একক ভিটামিন A এবং 10 একক ভিটামিন C থাকে। প্রথম প্রকার খাদ্যে ভিটামিন A এবং ভিটামিন C-এর পরিমাণ যথাক্রমে 2 একক/কেজি এবং 1 একক/কেজি। দ্বিতীয় প্রকার খাদ্যে ভিটামিন A ও ভিটামিন C-এর পরিমাণ যথাক্রমে 1 একক/কেজি এবং 2 একক/কেজি। প্রথম প্রকার খাদ্যের মূল্য 50 টাকা/কেজি এবং দ্বিতীয় প্রকারের মূল্য 70 টাকা/কেজি। এই সমস্যাটির জন্য একটি রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি গঠন করো যাতে খাবারের মিশ্রণটির খরচ সবথেকে কম হয়।

(ii) লেখচিত্রের সাহায্যে $Z = 4x + y$ -এর সর্বাধিক মান নির্ণয় করো

যেখানে $x + y \leq 50$, $3x + y \leq 90$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

(ছক কাগজের প্রয়োজন নেই)

(b) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

5 × 2 = 10

(i) কলনবিদ্যার প্রয়োগে দেখাও যে, $lx + my + n = 0$ সরলরেখা $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে, যদি $a^2(l^2 + m^2) = n^2$ হয়।

(ii) x একটি বাস্তব সংখ্যা। অন্তরকলন বিদ্যার প্রয়োগে $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ -এর চরম এবং অবম মান

নির্ণয় করো।

sciencemaster.in

(iii) $y = e^x(a \cos x + b \sin x)$ থেকে a এবং b -কে অর্পনয়ন করে অবকল সমীকরণ নির্ণয় করো।

(iv) মান নির্ণয় করো : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \right]$.

(c) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

5 × 1 = 5

(i) (1,2,3) বিন্দুগামী একটি সরলরেখা $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ -এর সমান্তরাল হলে

সরলরেখার কার্টিজীয় সমীকরণ নির্ণয় করো।

(ii) মূল বিন্দুগামী একটি সরলরেখা $x + y + z = 3$, সমতলের উপর লম্ব। ঐ লম্বের পাদবিন্দুর

স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

(iii) একটি সমতলের অক্ষগুলির উপর ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্যগুলি যথাক্রমে a, b, c ; মূলবিন্দু থেকে

ঐ সমতলের লম্ব দৈর্ঘ্য p একক হলে দেখাও যে $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$.

sciencemaster.in